Newton’sches Abkühlungsgesetz

Aufgabennummer: B_077

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Newton’sche Abkühlungsgesetz besagt, dass die momentane Änderungsrate der Temperatur eines Körpers proportional zur Differenz zwischen der Temperatur des abkühlenden Körpers zur Zeit t und der Umgebungstemperatur ist.

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = k \cdot (T_U - T(t))$$

t … Zeit in Minuten (min)
$T(t)$ … Temperatur des Körpers zur Zeit t in °C
T_U … Umgebungstemperatur in °C
$k > 0$ … Proportionalitätsfaktor in min^{-1}

a) Ein Thermometer wird aus einem Raum ins Freie gebracht, wo es eine Temperatur von $T_U = -10$ °C hat. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung für $k = 0{,}84$ min^{-1} lautet:

$T(t) = -10 - C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t}$

– Zeigen Sie, dass diese Funktion T die allgemeine Lösung der gegebenen Differenzialgleichung ist.

Der Raum, aus dem das Thermometer ins Freie gebracht wird, hat eine Temperatur von 22 °C. Zu Beginn ($t = 0$) zeigt das Thermometer also eine Temperatur von 22 °C an.

– Ermitteln Sie für diesen Sachzusammenhang eine spezielle Lösung der Differenzialgleichung.
– Stellen Sie den Funktionsgraphen dieser speziellen Lösung in einem Koordinatensystem für 0 min $\leq t \leq$ 5 min grafisch dar.

b) Für eine weitere spezielle Lösung der Differenzialgleichung gilt:

$T(t) = 43 \cdot (0{,}4317^t - 0{,}1163)$

Das Thermometer wird zur Zeit $t = 0$ aus einem Raum ins Freie ($T_U = -5$ °C) gebracht.

– Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen speziellen Lösung, nach welcher Zeit t das Thermometer 0 °C anzeigt.
– Ermitteln Sie, welche Temperatur im Raum herrscht.

c) – Erklären Sie anhand der gegebenen Differenzialgleichung, warum die Steigung der Abkühlungskurve positiv ist, wenn die Umgebungstemperatur T_U höher als die Temperatur $T(t)$ des Körpers ist.
– Interpretieren Sie im gegebenen Sachzusammenhang, was es bedeutet, wenn $\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}$ gegen null geht.

d) Für ein Experiment wird ein Topf mit warmem Wasser ins Freie bei einer Temperatur von 0 °C gestellt.

– Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung für den Abkühlvorgang mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

In diesem Experiment hat das Wasser im Topf zu Beginn eine Temperatur von 50 °C. Nach 30 Minuten beträgt die Temperatur des Wassers 36 °C.

– Ermitteln Sie mithilfe dieser Angaben den Proportionalitätsfaktor k.

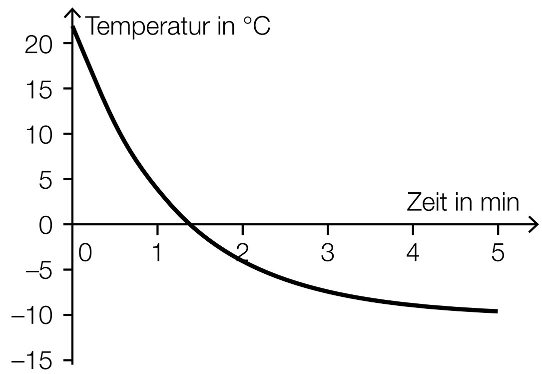
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $T(t) = -10 - C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t}$
$T'(t) = 0{,}84 \cdot C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t}$
Einsetzen in Differenzialgleichung: $0{,}84 \cdot C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t} = k \cdot (T_U + 10 + C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t})$

Mit $T_U = -10$ und $k = 0{,}84$ gilt:
$0{,}84 \cdot C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t} = 0{,}84 \cdot C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t} \Rightarrow$ Die angegebene Lösung ist korrekt.

$T(0) = 22$
$22 = -10 - C \cdot e^0 \Rightarrow C = -32$
$T(t) = 32 \cdot e^{-0{,}84 \cdot t} - 10$ … spezielle Lösung der Differenzialgleichung



b) Lösen der Gleichung $0 = 43 \cdot (0{,}4317^t - 0{,}1163)$ liefert $t = 2{,}5613...$ min.
Nach etwa 2,6 Minuten zeigt das Thermometer 0 °C an.

$T(0) = 43 \cdot (0{,}4317^0 - 0{,}1163) = 37{,}9991$
$T \approx 38$ °C

c) $\frac{dT(t)}{dt} = k \cdot (T_U - T(t))$

Da $k > 0$ und $T_U > T(t)$, also $T_U - T(t) > 0$, ist das Produkt $k \cdot (T_U - T(t)) = \frac{dT(t)}{dt} > 0$.
Die Steigung der Abkühlungskurve ist also positiv.

$\frac{dT(t)}{dt} = 0 \Rightarrow k \cdot (T_U - T) = 0$ mit $k > 0 \Rightarrow T = T_U$
Die Temperatur T nähert sich der Umgebungstemperatur T_U.

d) $\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = k \cdot (T_U - T(t))$

Trennen der Variablen: $\frac{\mathrm{d}T(t)}{T_U - T(t)} = k \cdot \mathrm{d}t$

$\int \frac{\mathrm{d}T(t)}{T_U - T(t)} = k \cdot \int \mathrm{d}t$

$-\ln|T_U - T(t)| = k \cdot t + C$

$\ln|T_U - T(t)| = -k \cdot t - C$

$T_U - T(t) = e^{-k \cdot t} \cdot e^{-C}$

$T(t) = T_U - e^{-k \cdot t} \cdot e^{-C}$

Mit $T_U = 0$ und $e^{-C} = T_0$ erhält man:

$T(t) = T_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ … allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

T_0 … Anfangstemperatur des Wassers

k … Proportionalitätsfaktor

$T_0 = 50$ °C

$36 = 50 \cdot e^{-k \cdot 30}$

$k = -\frac{1}{30} \cdot \ln\left(\frac{36}{50}\right)$

$k = 0{,}010950\ldots$

$k \approx 0{,}011 \text{ min}^{-1}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 4 Analysis
d) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) schwer
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 2
c) 2
d) 2

Thema: Physik

Quellen: —