

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2024

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

Hinweise zur standardisierten Durchführung der Kompensationsprüfung

Die vorliegende Angabe zur Kompensationsprüfung umfasst vier Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind, und die dazugehörigen Lösungen.

Jede Aufgabe umfasst drei nachzuweisende Handlungskompetenzen.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Die Verwendung der vom zuständigen Regierungsmitglied für die Klausurarbeit freigegebenen Formelsammlung für die SRP in Mathematik ist erlaubt. Weiters ist die Verwendung von elektronischen Hilfsmitteln (z. B. grafikfähiger Taschenrechner oder andere entsprechende Technologie) erlaubt, sofern keine Kommunikationsmöglichkeit (z. B. via Internet, Intranet, Bluetooth, Mobilfunknetzwerke etc.) gegeben ist und der Zugriff auf Eigendateien im elektronischen Hilfsmittel nicht möglich ist.

Nach der Prüfung sind alle Unterlagen (Prüfungsaufgaben, Arbeitsblätter etc.) der Kandidatinnen und Kandidaten einzusammeln. Die Prüfungsunterlagen (Prüfungsaufgaben, Arbeitsblätter, produzierte digitale Arbeitsdaten etc.) dürfen erst nach dem für die Kompensationsprüfung vorgesehenen Zeitfenster öffentlich werden.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Der nachstehende Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Kandidat/in 1			Kandidat/in 2			Kandidat/in 3			Kandidat/in 4			Kandidat/in 5		
Aufgabe 1															
Aufgabe 2															
Aufgabe 3															
Aufgabe 4															
gesamt															

Erläuterungen zur Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem, zwei oder drei Punkten bewertet. Insgesamt können maximal zwölf Punkte erreicht werden.

Beurteilungsschlüssel für die Kompensationsprüfung

Gesamtanzahl der nachgewiesenen Handlungskompetenzen	Beurteilung der mündlichen Kompensationsprüfung
12	Sehr gut
10–11	Gut
8–9	Befriedigend
6–7	Genügend
0–5	Nicht genügend

Aufgabe 1

Bahnstrecken

- a) Das Gleisnetz der Österreichischen Bundesbahnen besteht auf einer Länge von rund 3686 km aus eingleisigen Strecken. Diese Länge entspricht 65,37 % der gesamten Länge aller Strecken der Österreichischen Bundesbahnen.
- 1) Berechnen Sie die gesamte Länge aller Strecken der Österreichischen Bundesbahnen.
- b) Die Mittenwaldbahn hat an ihrer steilsten Stelle eine Steigung von 3,8 %.
- 1) Zeigen Sie, dass eine Verdoppelung der Steigung von 3,8 % auch eine annähernde Verdoppelung des Steigungswinkels bedeutet.
- c) Eine Personengruppe aus 9 Personen kauft Fahrkarten für einen Ausflug mit der Bahn. Die Personengruppe besteht aus 3 Erwachsenen, 2 Senioren und 4 Kindern und bezahlt insgesamt g Euro.
Der Preis für 1 Erwachsenenkarte ist doppelt so hoch wie der Preis für 1 Kinderkarte.
Der Preis für 1 Seniorenkarte ist um 25 % niedriger als der Preis für 1 Erwachsenenkarte.
- e ... Preis für 1 Erwachsenenkarte in Euro
 s ... Preis für 1 Seniorenkarte in Euro
 k ... Preis für 1 Kinderkarte in Euro
- 1) Erstellen Sie mithilfe von g ein Gleichungssystem zur Berechnung von e , s und k .

Lösung zur Aufgabe 1

Bahnstrecken

$$\text{a1) } \frac{3686}{0,6537} = 5638,6\dots$$

Die gesamte Länge aller Strecken der Österreichischen Bundesbahnen beträgt rund 5639 km.

b1) Steigungswinkel bei einer Steigung von 3,8 %:

$$\alpha = \arctan(0,038) = 2,17\dots^\circ$$

Steigungswinkel bei der verdoppelten Steigung von 7,6 %:

$$\beta = \arctan(0,076) = 4,34\dots^\circ$$

Es gilt also: $\beta \approx 2 \cdot \alpha$

$$\text{c1) } 3 \cdot e + 2 \cdot s + 4 \cdot k = g$$

$$e = 2 \cdot k$$

$$s = 0,75 \cdot e$$

Aufgabe 2

Seltene Tierart

In einem bestimmten Gebiet werden Tiere einer seltenen Tierart über einen bestimmten Zeitraum hinweg beobachtet.

In der nachstehenden Tabelle ist die Anzahl der Tiere für die Jahre 2010 und 2020 angegeben.

Jahr	Anzahl der Tiere
2010	600
2020	300

- a) Es wird angenommen, dass die Anzahl der Tiere im Zeitraum von 2010 bis 2020 exponentiell abnimmt.

Die Exponentialfunktion f beschreibt modellhaft die Anzahl der Tiere in Abhängigkeit von der Zeit.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2010

$f(t)$... Anzahl der Tiere zum Zeitpunkt t

- 1) Stellen Sie eine Gleichung der Exponentialfunktion f auf.

- b) 1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{300 - 600}{2020 - 2010} = -30$$

- c) In einem anderen Modell wird die Anzahl der Tiere im Zeitraum von 2010 bis 2020 durch die Funktion g beschrieben.

$$g(t) = \frac{c}{t} \quad \text{mit} \quad 10 \leq t \leq 20$$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2000

$g(t)$... Anzahl der Tiere zum Zeitpunkt t

c ... positiver Parameter

- 1) Berechnen Sie gemäß diesem Modell die Anzahl der Tiere im Jahr 2015.

Lösung zur Aufgabe 2

Seltene Tierart

a1)	$f(t) = a \cdot b^t$	oder:	$f(t) = a \cdot e^{\lambda \cdot t}$
	$f(0) = 600$		$f(0) = 600$
	$f(10) = 300$		$f(10) = 300$
	$a = 600$		$a = 600$
	$b = \sqrt[10]{\frac{300}{600}} = 0,9330\dots$		$\lambda = \ln(0,9330\dots) = -0,0693\dots$
	$f(t) = 600 \cdot 0,933^t$		$f(t) = 600 \cdot e^{-0,0693\dots \cdot t}$

b1) Die Anzahl der Tiere nahm im Zeitraum von 2010 bis 2020 um durchschnittlich 30 Tiere pro Jahr ab.

c1) $g(10) = 600$
 $c = 10 \cdot 600 = 6000$
 $g(15) = \frac{6000}{15} = 400$

Im Jahr 2015 betrug die Anzahl der Tiere gemäß diesem Modell 400.

Aufgabe 3

Weinkeller

- a) In einem Weinkeller wird regelmäßig die Lufttemperatur gemessen (siehe nachstehende Tabelle).

Zeit in Tagen	0	60	100
Lufttemperatur in °C	8	13	17

- 1) Zeigen Sie rechnerisch, dass die drei in der obigen Tabelle angegebenen Wertepaare nicht Punkte auf einer Geraden sind.
- b) Der zeitliche Verlauf der Temperatur in einem anderen Keller lässt sich modellhaft durch die Funktion T beschreiben.

$$T(t) = 0,0005 \cdot t^3 - 0,02 \cdot t^2 + 0,23 \cdot t + 8 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 24$$

t ... Zeit in h mit $t = 0$ für den Messbeginn

$T(t)$... Temperatur zum Zeitpunkt t in °C

Die mittlere Temperatur in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ lässt sich mit dem nachstehenden Ausdruck berechnen.

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} T(t) dt$$

- 1) Berechnen Sie die mittlere Temperatur in diesem Keller im Zeitintervall $[0; 24]$.
- c) In einem Weinkeller steht ein Entfeuchtungsgerät, das Wasser aus der Raumluft als Kondenswasser sammelt.

Bei einer Lufttemperatur von 10 °C beträgt das Volumen des täglich gesammelten Kondenswassers 5 L. Bei einer Lufttemperatur von 20 °C beträgt das Volumen des täglich gesammelten Kondenswassers 7 L.

Bei einer Lufttemperatur von 11,25 °C ist das Volumen des täglich gesammelten Kondenswassers am geringsten.

Das Volumen des täglich gesammelten Kondenswassers in Abhängigkeit von der Lufttemperatur soll durch die quadratische Funktion V modelliert werden.

$$V(T) = a \cdot T^2 + b \cdot T + c$$

T ... Lufttemperatur in °C

$V(T)$... Volumen des täglich gesammelten Kondenswassers bei der Lufttemperatur T in L

- 1) Erstellen Sie ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a , b und c .

Lösung zur Aufgabe 3

Weinkeller

$$\text{a1) } \frac{13-8}{60-0} = 0,083\dots$$

$$\frac{17-13}{100-60} = 0,1$$

$$\frac{17-8}{100-0} = 0,09$$

Da die Differenzenquotienten nicht gleich sind, liegen die drei Punkte nicht auf einer Geraden.

Für die Punktevergabe ist es nicht erforderlich, alle 3 angegebenen Differenzenquotienten zu ermitteln. Ein Nachweis mit den Kehrwerten der angegebenen Differenzenquotienten ist ebenfalls als richtig zu werten.

$$\text{b1) } \frac{1}{24-0} \cdot \int_0^{24} T(t) dt = 8,648$$

Die mittlere Temperatur in diesem Keller im Zeitintervall $[0; 24]$ beträgt rund $8,65$ °C.

$$\text{c1) } V'(T) = 2 \cdot a \cdot T + b$$

$$\text{I: } V(10) = 5$$

$$\text{II: } V(20) = 7$$

$$\text{III: } V'(11,25) = 0$$

oder:

$$\text{I: } 100 \cdot a + 10 \cdot b + c = 5$$

$$\text{II: } 400 \cdot a + 20 \cdot b + c = 7$$

$$\text{III: } 22,5 \cdot a + b = 0$$

Aufgabe 4

Kino

7 Freunde sehen sich in einem Kino gemeinsam einen Film an.

- a) In diesem Kino gelten für Mitglieder im Bonusclub und für Schüler/innen reduzierte Preise für Kinokarten.

Alle Preise sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Preis pro Kinokarte in €
Normalpreis	15
Mitglied im Bonusclub	13,50
Schüler/in	12

Die 7 Freunde kaufen 2 Kinokarten zum Normalpreis, 1 Kinokarte als Mitglied im Bonusclub und 4 Kinokarten zum Preis für Schüler/innen.

- 1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{2 \cdot 15 + 13,50 + 4 \cdot 12}{7} \approx 13,07\dots$$

- b) In diesem Kino werden Gutscheine verlost. Jede Person erhält genau ein Los. Die Wahrscheinlichkeit, einen Gutschein zu gewinnen, ist für jedes Los gleich groß.

Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt, wie viele der 7 Freunde jeweils genau einen solchen Gutschein gewinnen.

Es gilt: $P(X = 0) = 0,3206$

- 1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3 der 7 Freunde jeweils genau einen solchen Gutschein gewinnen.
- c) Die Anzahl a gibt an, wie vielen von den 7 Freunden der Film gefallen hat. Nach dem Kinobesuch werden 2 der 7 Freunde für eine Besucherumfrage nach dem Zufallsprinzip ausgewählt. Mit E wird das Ereignis bezeichnet, dass diesen 2 Freunden der Film gefallen hat.

- 1) Stellen Sie mithilfe von a eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(E)$ auf.

$$P(E) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Lösung zur Aufgabe 4

Kino

a1) Die 7 Freunde geben durchschnittlich rund 13,07 Euro für eine Kinokarte aus.

oder:

Das arithmetische Mittel der Preise der Kinokarten der 7 Freunde beträgt rund 13,07 Euro.

$$\text{b1) } \binom{7}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^7 = (1-p)^7 = 0,3206$$

$$p = 1 - \sqrt[7]{0,3206}$$

$$p = 0,1499\dots$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$P(X \geq 3) = 0,0737\dots$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3 der 7 Freunde jeweils genau einen solchen Gutschein gewinnen, beträgt rund 7,4 %.

$$\text{c1) } P(E) = \frac{a}{7} \cdot \frac{a-1}{6}$$