

# Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur  
standardisierten kompetenzorientierten  
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2018

## Mathematik

Kompensationsprüfung 2  
Angabe für **Prüfer/innen**

# Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

## Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

# Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

# Aufgabe 1

## Ohm'sches Gesetz

Das Ohm'sche Gesetz beschreibt unter bestimmten Bedingungen den Zusammenhang zwischen der Spannung  $U$ , der Stromstärke  $I$  und dem Widerstand  $R$  in einem Leiter. Es gilt:  $U = R \cdot I$  mit  $U, R, I \in \mathbb{R}^+$ .

### Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion  $U$  mit  $I \mapsto U(I)$  bei konstantem  $R$  sowie den Graphen einer Funktion  $I$  mit  $U \mapsto I(U)$  bei konstantem  $R$ !

Geben Sie für jede der beiden Funktionen die Bedeutung von  $R$  in der Darstellung des Graphen an und beschreiben Sie, wie sich jeweils eine Vergrößerung von  $R$  auf den jeweiligen Graphen auswirkt!

### Leitfrage:

Einige Gesetzmäßigkeiten, die durch das Ohm'sche Gesetz beschrieben werden, stehen in einem linearen Zusammenhang.

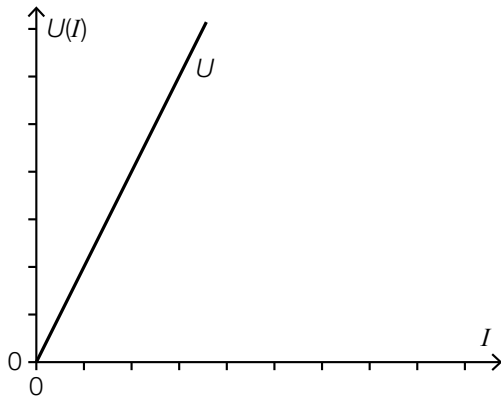
Lineare Zusammenhänge werden allgemein durch eine Funktion  $f$  mit  $f(x) = k \cdot x + d$  mit  $k, d \in \mathbb{R}$  beschrieben.

Geben Sie in Abhängigkeit von den Werten der Parameter  $k$  und  $d$  an, wie viele Nullstellen die Funktion  $f$  haben kann, wenn  $d \neq 0$  gilt, und geben Sie diese Nullstelle(n) gegebenenfalls an!

# Lösung zur Aufgabe 1

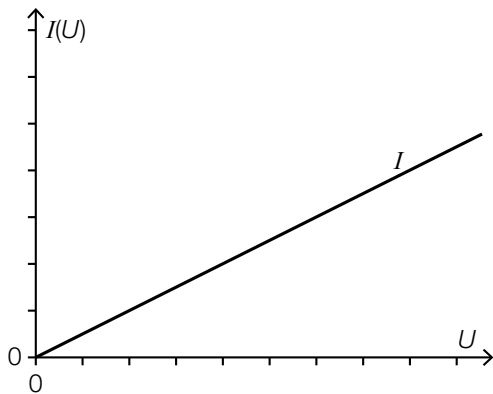
## Ohm'sches Gesetz

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Die Steigung der Funktion  $U$  ist  $R$ .

Wird  $R$  vergrößert, so verläuft der Graph von  $U$  steiler.



Die Steigung der Funktion  $I$  ist  $\frac{1}{R}$ .

Wird  $R$  vergrößert, so verläuft der Graph von  $I$  flacher.

**Lösungsschlüssel:**

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl beide Graphen richtig skizziert als auch die Bedeutung von  $R$  und die jeweilige Auswirkung einer Vergrößerung von  $R$  korrekt angegeben werden. Andere richtige Skizzen sind ebenfalls als richtig zu werten.

**Lösungserwartung zur Leitfrage:**

Für  $k \neq 0$  hat die Funktion für jedes  $d \in \mathbb{R}$  genau eine Nullstelle  $x_0$ , weil:  $k \cdot x_0 + d = 0$   
 $\Rightarrow x_0 = -\frac{d}{k}$

Für  $k = 0$  gilt:  $f(x) = d$   
 $\Rightarrow$  für  $d \neq 0$  hat die Funktion  $f$  keine Nullstelle.

**Lösungsschlüssel:**

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Anzahl an möglichen Nullstellen und die Nullstelle  $x_0 = -\frac{d}{k}$  angegeben werden.

# Aufgabe 2

## Kapitalentwicklung

Ein Kapital  $K$  wird mit einem jährlichen Zinssatz von 0,2 % verzinst. Im Folgenden wird angenommen, dass sämtliche Steuern und eventuell anfallende Gebühren bereits berücksichtigt sind.

### Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die Bedeutung der beiden nachstehenden Terme im gegebenen Kontext!

$$K \cdot 0,002$$

$$K \cdot 1,002^5 - K$$

### Leitfrage:

Eine Großmutter zahlt für ihre Enkeltochter zu Beginn eines jeden Jahres jeweils € 500 auf ein Sparkonto ein, das mit einem jährlichen Zinssatz von 0,2 % verzinst wird.

Berechnen Sie den Kontostand zu Beginn des dritten Jahres (direkt nach der dritten Einzahlung).

Jemand behauptet, dass der Kontostand nach  $n$  Jahren durch eine Funktionsgleichung der Form  $K(n) = a \cdot b^n$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  darstellbar ist.

Geben Sie an, ob die Behauptung zutreffend ist oder nicht, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

# Lösung zur Aufgabe 2

## Kapitalentwicklung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Der Term  $K \cdot 0,002$  beschreibt die Zinsen, die man im ersten Jahr bekommt.

Der Term  $K \cdot 1,002^5 - K$  beschreibt den Kapitalzuwachs in fünf Jahren.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Terme im Kontext korrekt interpretiert werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$K(0) = € 500$$

$$K(1) = 500 \cdot 1,002 + 500 = € 1.001$$

$$K(2) = 1.001 \cdot 1,002 + 500 \approx € 1.503$$

Die Behauptung ist nicht zutreffend, da durch die jährliche Einzahlung von € 500 der Quotient  $\frac{K(n+1)}{K(n)}$  nicht konstant bleibt, und somit ist  $K(n)$  nicht durch eine Exponentialfunktion darstellbar.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Kontostand angegeben wird und wenn erkannt wird, dass die Behauptung falsch ist, und dies korrekt begründet wird.

## Aufgabe 3

### Kräfteparallelogramm

Zwei Kräfte  $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  greifen in einem Punkt an ( $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}, x_1 > 0$ ).

Die beiden Kräfte  $\vec{F}_1$  und  $\vec{F}_2$  schließen einen rechten Winkel ein. Für die resultierende Kraft  $\vec{F}$  gilt:  
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 75 \end{pmatrix}.$$

#### Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Werte der Koordinaten (Komponenten)  $x_1, x_2$  und  $y_2$ , wenn die Koordinate  $y_1 = 27$  ist!

#### Leitfrage:

Geben Sie eine Formel zur Berechnung des Winkels  $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$  zwischen den Kräften  $\vec{F}$  und  $\vec{F}_2$  an und berechnen Sie diesen Winkel  $\alpha$ !



# Lösung zur Aufgabe 3

## Kräfteparallelogramm

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$27 + y_2 = 75 \Rightarrow y_2 = 48$$

$$x_1 \cdot x_2 + 27 \cdot 48 = 0 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -1\,296$$

$$x_1 > 0, x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 36, x_2 = -36$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Werte für die Koordinaten  $x_1$ ,  $x_2$  und  $y_2$  angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\text{mögliche Formel: } \cos(\alpha) = \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{F}|}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{60}{75} = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha \approx 36,87^\circ$$

Lösungsschlüssel:

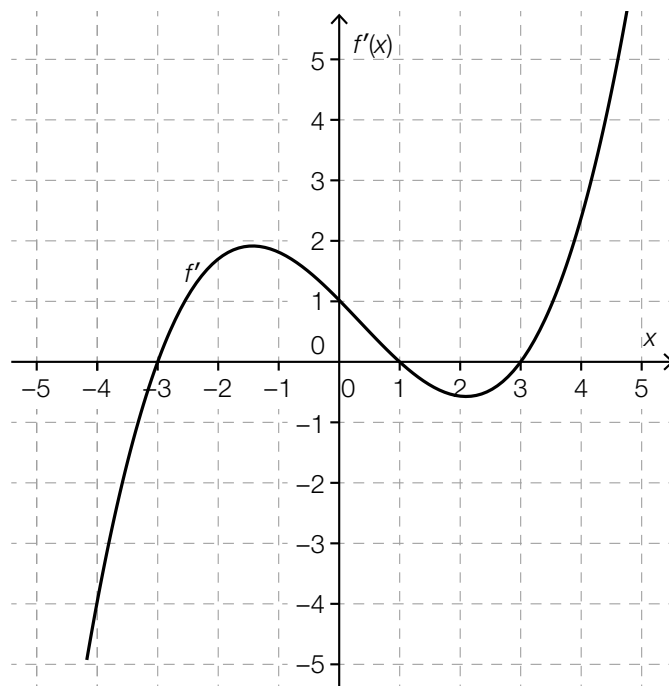
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Formel und der richtige Winkel angegeben werden.

Toleranzintervall für  $\alpha$ :  $[36^\circ; 37^\circ]$

# Aufgabe 4

## Funktionseigenschaften

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion  $f'$  einer Polynomfunktion  $f$  vierten Grades.



### Aufgabenstellung:

Geben Sie zu jeder der drei nachstehenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Aussage 1: Die Funktion  $f$  hat im Intervall  $(-4; 4)$  genau zwei lokale Extremstellen.

Aussage 2: Die Funktion  $f$  ist im Intervall  $(0; 2)$  streng monoton fallend.

Aussage 3: Die Funktion  $f$  ist im Intervall  $(-1; 1)$  rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).

### Leitfrage:

Skizzieren Sie in der gegebenen Abbildung einen möglichen Graphen von  $f$  und erklären Sie den Zusammenhang zwischen den Verläufen der Graphen von  $f'$  und  $f$ !

# Lösung zur Aufgabe 4

## Funktionseigenschaften

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Aussage 1 ist falsch, da  $f'$  im Intervall  $(-4; 4)$  drei unterschiedliche Nullstellen hat und somit drei lokale Extremstellen vorhanden sein müssen.

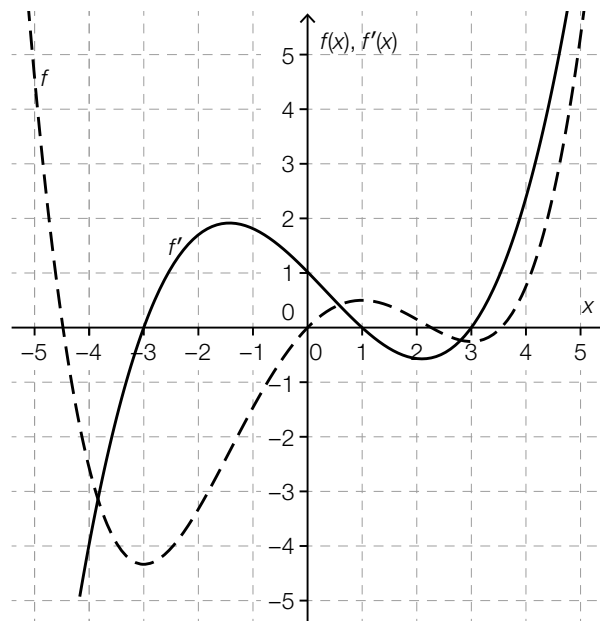
Aussage 2 ist falsch, denn  $f$  ist im Intervall  $(0; 1)$  streng monoton steigend, da  $f'$  im Intervall  $(0; 1)$  positive Funktionswerte hat.

Aussage 3 ist wahr, da  $f'$  im Intervall  $(-1; 1)$  streng monoton fällt und somit die Steigung von  $f$  abnimmt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn bei jeder der drei Aussagen richtig erkannt wird, ob sie wahr oder falsch ist, und dies jeweils (sinngemäß) korrekt begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



Mögliche Erklärung:

Der Graph der Funktion  $f'$  hat bei  $x = -3$ ,  $x = 1$  und  $x = 3$  Nullstellen, daher hat  $f$  an diesen Stellen lokale Extremstellen. Da der Graph von  $f'$  für  $x < -3$  negative Funktionswerte und für  $x \in (-3; 1)$  positive Funktionswerte hat, hat  $f$  bei  $x = -3$  eine lokale Minimumstelle. Analog liegt bei  $x = 3$  eine lokale Minimumstelle und bei  $x = 1$  eine lokale Maximumstelle vor. Bei  $x \approx -1,5$  und  $x \approx 2,1$  hat  $f'$  lokale Extremstellen, d. h., die Steigung von  $f$  ist an diesen Stellen maximal oder minimal. Der Graph von  $f$  hat daher an diesen Stellen Wendepunkte.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Graph skizziert und der Zusammenhang zwischen den Verläufen der beiden Graphen richtig erklärt wird.

# Aufgabe 5

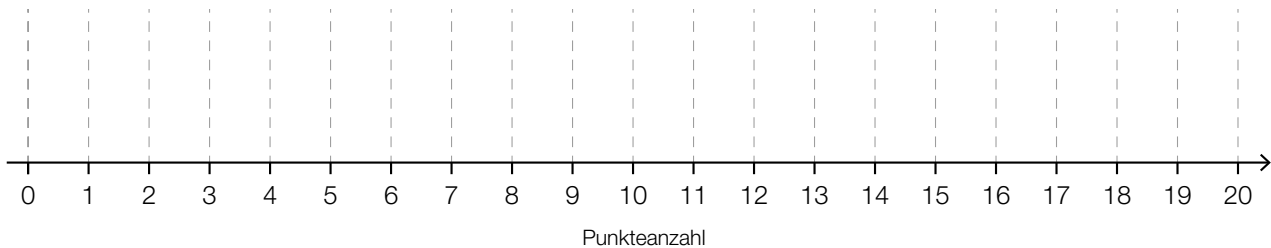
## Aufnahmetest

An einem Aufnahmetest haben 65 Personen teilgenommen. Bei diesem Aufnahmetest konnten höchstens 20 Punkte erreicht werden. Die nachstehende Tabelle zeigt die Testergebnisse.

erreichte Punkte	< 7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Anzahl der Personen	0	1	0	2	4	3	3	5	10	8	8	7	7	4	3

### Aufgabenstellung:

Stellen Sie die Testergebnisse in einem Boxplot (Kastenschaubild) dar und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!



### Leitfrage:

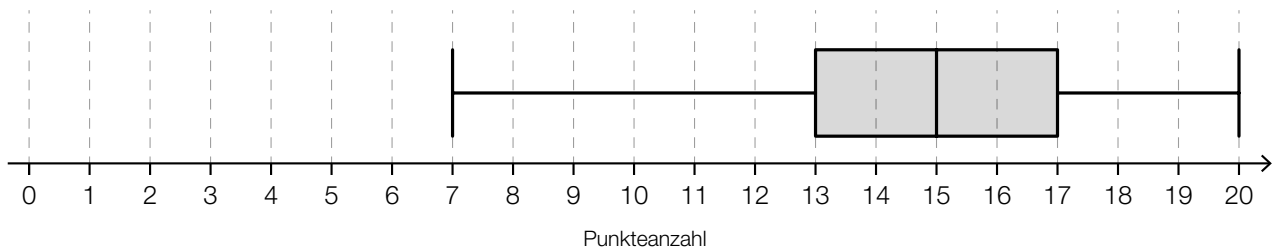
Geben Sie an, welche der nachstehenden Informationen nur aus der Tabelle und welche sowohl aus der Tabelle als auch aus dem Boxplot abgelesen werden können, und begründen Sie Ihre Entscheidungen!

- 1) Die am häufigsten erreichte Punkteanzahl ist 14.
- 2) Die Anzahl derjenigen Personen, die 13 oder 14 Punkte erreicht haben, ist gleich der Anzahl derjenigen Personen, die 16 oder 17 Punkte erreicht haben.
- 3) Die Kandidatinnen/Kandidaten mit der höchsten Punkteanzahl haben um 13 Punkte mehr erreicht als die Kandidatin/der Kandidat mit der niedrigsten Punkteanzahl.

# Lösung zur Aufgabe 5

## Aufnahmetest

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Minimum = 7

1. Quartil = 13

Median = 15

3. Quartil = 17

Maximum = 20

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Boxplot gezeichnet sowie eine korrekte Vorgehensweise angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Informationen 1 und 2 können nur aus der Tabelle abgelesen werden, da die Häufigkeiten von einzelnen Datenwerten im Boxplot nicht ersichtlich sind.

Die Information 3 kann aus beiden Darstellungsformen abgelesen werden, da die Spannweite sowohl in der Tabelle als auch im Boxplot ersichtlich ist.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jede Information richtig erkannt wird, ob sie nur aus der Tabelle oder auch aus dem Boxplot abgelesen werden kann, und dies jeweils (sinngemäß) korrekt begründet wird.